Министерство науки и высшего образования Российской федерации
Дагестанский государственный технический университет
(ДГТУ)
Филиал в г. Дербенте

Кафедра «ЕГОиСД»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторных работ по дисциплине
«Финансовая математика»
для студентов направления подготовки бакалавров
09.03.03 «Прикладная информатика»

Дербент 2021

УДК 331(075.8
ББК 65.050.2я73

Учебно-методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Финансовая математика» для студентов направления 09.03.03., «Прикладная информатика в экономике», Махачкала, ИПЦ ДГТУ, 2021г.- 57с.

Составитель: К.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры «ЕГО и СД» Ганиев А.С.

Рецензенты: к.т.н., ст. преподаватель ГБПОУ РД «Колледж экономики и права» Гасанов В.М.

к.ф.-м.н. ст. преподаватель ДГТУ ФД кафедры ЕГО и СД Эмирбеков Э.Т.

Аннотация: В учебно-методических указаниях к выполнению лабораторных работ рассматриваются выполнение лабораторных работ по дисциплине «Финансовая математика» для студентов всех форм обучения по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика».

В учебно-методических указаниях излагается ход проведения лабораторных занятий: даны краткие теоретические указания по темам, цели проведения занятий, необходимые основные формулы для решения задач кредитных, депозитных, ипотечных операций, учетов векселей, для сравнения эффективности финансовых сделок.

В учебно-методических указаниях приведено большое количество типовых задач с решениями по тематике, задания на практические занятия, контрольные вопросы с целью закрепления теоретических знаний.

Рег.№_______
Печатается по решению Ученого совета ДГТУ
Протокол №___от «___»_____________2021г.

Содержание

Введение

Финансовая математика является основой для банковских операций и коммерческих сделок. В предлагаемых учебно-методических указаниях рассматриваются выполнение лабораторных работ по дисциплине «Финансовая математика» для студентов всех форм обучения по направлению 09.03.03 «Прикладная информатика»

В учебно-методических указаниях излагаются ход проведения лабораторных работ: даны краткие теоретические указания по темам, цели проведения занятий, необходимые основные формулы для решения задач кредитных, депозитных, ипотечных операций, учетов векселей, для сравнения эффективности финансовых сделок.

В учебно-методических указаниях приведены большое количество типовых задач с решениями по тематике, задания на выполнение лабораторных работ, контрольные вопросы с целью закрепления теоретических знаний

Лабораторная работа № 1. Простые ссудные ставки

Денежные ресурсы, участвующие в финансовой операции, имеют временную ценность, смысл которой может быть выражен следующим утверждением: одна денежная единица, имеющаяся в распоряжении инвестора в данный момент времени, более предпочтительна, чем та же самая денежная единица, но ожидаемая к получению в некотором будущем. Эффективность любой финансовой операции, предполагающей наращение исходной суммы *P* до ожидаемой в будущем к получению суммы *F* *(F>P),* может быть охарактеризована ставкой.

Простая ссудная ставка рассчитывается отношением наращения *(F-P)* к исходной (базовой) величине *P*.

Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление.

В финансовых вычислениях базовым периодом является год**,** поэтому обычно говорят о годовой ставке. Вместе с тем достаточно широко распространены краткосрочные операции продолжительностью до года. В этом случае за основу берется дневная ставка, причем в зависимости от алгоритмов расчета дневной ставки и продолжительности финансовой операции результаты наращения будут различными. Используются три варианта расчета: а) точный процент и точное число дней финансовой операции – обозначение 365/365 ; б) обыкновенный процент и точное число дней финансовой операции -обозначение 365/360; в) обыкновенный процент и приблизительное число дней финансовой операции- обозначение 360/360.

Математическое дисконтирование является процессом, обратным к наращению первоначального капитала. При математическом дисконтировании решается задача нахождения такой величины капитала (так называемой «приведенной стоимости»), которая через заданное время при наращении по данной процентной ставке будет равна сумме, ожидаемой к получению (уплате) через заданное время.

Возможно финансовое соглашение, предусматривающее изменение во времени ссудной ставки.

Любая финансовая операция предусматривает участие, как минимум, двух сторон: кредитора (инвестора) и заемщика (получателя финансовых ресурсов); это обстоятельство является существенным для вынесения суждения об эффективности некоторой операции. Так, экономическая интерпретация ставки вообще и ее значения в частности зависит от того, с чьих позиций - кредитора или заемщика она дается. Для кредитора ставка характеризует его относительный доход; для заемщика - его относительные расходы. Поэтому кредитор всегда заинтересован в высокой ставке или в повышении ставки; интересы заемщика - прямо противоположны.

Цель проведения занятия- научиться проводить расчеты по схеме простых ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений.

Основные формулы

$$F = P(1 + n \cdot r) \quad (1.1)$$

$$P = F/(1 + n \cdot r) \quad (1.2)$$

$$F=P\cdot(1+r\times t/T) \quad (1.3)$$

$$F = P(1+\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot r_i) \qquad (1.4)$$

$$r = \frac{F-P}{P \cdot n}, r = \frac{F-P}{P \cdot t} \cdot T \qquad (1.5)$$

$$n = \frac{F-P}{P \cdot r} \qquad (1.6)$$

где

P - вложенная сумма;

F – наращенная сумма;

n - количество периодов продолжительности финансовой операции;

r- простая ссудная ставка;

Типовые задачи с решениями

Задача 1.Вы поместили в банк вклад 100 тыс. руб. под простую процентную ставку 6% годовых. Какая сумма будет на счете через 3 года? Какова величина начисленных процентов?

Решение

По формуле (1.1.) при *P=100 тыс. руб., n=3, r =0,06* получаем :

F=100 ×(1+3×0,06)=118 тыс. руб.

Через три года на счете накопится 118 тыс. рублей.

Величина начисленных за три года процентов составит:

118 -100=18 тыс. руб.

Задача 2.На какой срок необходимо поместить денежную сумму под простую процентную ставку 8% годовых, чтобы она увеличилась в 2 раза?

Решение

Искомый срок определяем из равенства множителя наращения величине 2 :

1+n×0,08=2, поэтому

n=1/0,08=12,5 лет.

Сумма, размещенная в банке под 8% годовых, в два раза увеличится через 12,5 лет.

Задача 3.Ссуда в сумме 3000 долл. предоставлена 16 января с погашением через 9 месяцев под 25 % годовых (год не високосный). Рассчитайте сумму к погашению при различных способах начисления процентов : а) обыкновенный процент с точным числом дней; б) обыкновенный процент с приближенным числом дней; в) точный процент с точным числом дней .

Решение

а) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам (*t=289-16=273* дня), получим:

F=3000·(1+0,25×273/360=3568,75 долл.

Сумма к погашению равна 3568,75 долл.

б) По формуле (1.3), используя обыкновенный процент с приближенным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам (*t=9×30=270* дня),получим:

F=3000· (1+0,25×270/360)=3562,5 долл.

Сумма к погашению равна 3562,5 долл.

в) По формуле (1.3), используя точный процент с точным числом дней, рассчитанным по финансовым таблицам (*t=289-16=273 дня*), получим:

F=3000· (1+0,25×273/365)=3560,96 долл.

Сумма к погашению равна 3560,96 долл.

Задача 4.В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 8,9 тыс. руб. через 120 дней при взятом кредите в размере 8 тыс. руб. Определить доходность такой сделки для банка в виде годовой процентной ставки при использовании банком простых обыкновенных процентов.

Решение

По формуле (1.5) при *F=8,9 тыс. руб., P= 8 тыс. руб., t= 120 дней, T=360 дней*, получим :

r=360×(8,9-8)/ (8×120)= 0,3375=33,75%.

Доходность банка составит 33,75 процентов годовых.

Задача 5.Господин X поместил 160 тыс. руб. в банк на следующих условиях: в первые полгода процентная ставка равна 8% годовых, каждый следующий квартал ставка повышается на 1%. Какая сумма будет на счете через полтора года, если проценты начисляются на первоначальную сумму вклада? Какую постоянную ставку должен использовать банк, чтобы сумма по вкладу не изменилась?

Решение

Применяя формулу (1.4), получим :

F=160×(1+0,5×0,08+0,25×0,09×+0,25×0,1+0,25×0,11+0,25×0,12)= 183,2

Через полтора года на счете накопится 183 200 руб.

Постоянную ставку, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, находим из уравнения:

$$160 \cdot (1 + 1{,}5 \cdot r) = 183{,}2$$

r=0,096667=,9,67%

Постоянная ставка, которую должен использовать банк, для того чтобы сумма, накопленная на счете, не изменилась, равна 9,67 % годовых.

Задача 6.Кредит выдается под простую ссудную ставку 24 % годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, полученную заемщиком, и сумму процентных денег, если необходимо возвратить 3500 тыс. руб.

Решение.

По формуле (1.2) при F = 3500; n=250/365; r=0,24 получаем:

P = 3500 /(1 + 0,24 ·250/365) =3017, 2

Сумма, получаемая заемщиком, составит 3 017 200 руб.

Сумма процентных денег равна (3 500 000 - 3 017 200) = 482 800 тыс. руб.

Лабораторная работа № 2. Простые учетные ставки

Учетная ставка рассчитывается отношением наращения (F-P) к ожидаемой в будущем к получению, или наращенной, величине *F*.

Схема простых процентов предполагает неизменность базы,с которой происходит начисление.

Банковское (коммерческое) дисконтирование применяется в ситуации предварительного начисления простого процента, например, при операции по учету векселя, заключающейся в покупке банком векселя у владельца до наступления срока оплаты по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по векселю на дату его погашения. Сумма, которую получает векселедержатель при досрочном учете векселя, называется дисконтированной величиной векселя.

Банковское дисконтирование нельзя осуществить во всех ситуациях, например, по достаточно большой учетной ставке и задолго до срока платежа.

Возможно финансовое соглашение, предусматривающее изменение во времени учетной ставки.

При применении наращения по простой учетной ставке величина начисляемых процентов с каждым годом увеличивается. Простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка.

Цель проведения занятия- научиться проводить расчеты по схеме простых учетных процентов, используя формулы финансовых вычислений.

Основные формулы

$$P = F \cdot (1 - n \cdot d) \quad (2.1)$$

$$F = P/(1 - n \cdot d) \quad (2.2)$$

$$P = F \cdot (1 - d \cdot t/T) \quad (2.3)$$

$$F = P/(1 - d \cdot t/t) \quad (2.4)$$

$D=F-P=F \times n \times d$ (2.5)

$$d = \frac{F - p}{F \cdot n}, d = \frac{F - P}{F \cdot t} \cdot T \quad (2.6)$$

$$n = \frac{F - P}{F \cdot d} \quad (2.7.)$$

$$F = P/(1 - \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot d_i) \quad (2.8)$$

где

P- вложенная сумма (сумма, которую получает владелец векселя при его учете) ;

F – наращенная сумма (номинальная стоимость векселя);

n- количество периодов продолжительности финансовой операции;

d-простаяучетная ставка;

t -продолжительность финансовой операции в днях;

T- количество дней в году;

D- дисконт.

Типовые задачи с решениями

Задача 1.В банк 6 мая предъявлен для учета вексель, на сумму 140 тыс. руб. со сроком погашения 10 июля того же года. Банк учитывает вексель по учетной ставке 40% годовых, считая, что в году 365 дней. Определить сумму, получаемую векселедержателем от банка, и комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу. За какое время до срока платежа операция учета векселя имеет смысл?

Решение

По формуле (2.1) при $F = 140.; n = 65/365, d = 0,4$ получим:
$P = 140\times(1-0,4 \times 65/365)=129,89$
Векселедержатель получит от банка 129,89 тыс. руб.
Комиссионные банка (или дисконт) определяются по формуле $D= F - P$
$D= F - P= 140-129,89=10,11$ *тыс. руб.*
Комиссионные, удерживаемые банком за свою услугу, равны 10,11 тыс. руб.
Учет векселя по учетной ставке имеет смысл при $n<1/d$, для этой задачи при $n< 2,5$ года. При $n>2,5$ года сумма Р, которую должен получить владелец векселя при его учете, становится отрицательной.

Задача 2. Кредит в размере 400 тыс. руб. выдан по простой учетной ставке 25% годовых. Определить срок кредита, если заемщик планирует получить на руки 350 тыс. руб.

Решение

По формуле (2.7.) при $F =400 ; P=350; d=0,25$ получаем:
$n = (400-350)/(400\times0,25)=0,5$
Срок кредита равен 0,5 года.

Задача 3. Вексель на сумму 900 тыс. руб. учитывается по простой учетной ставке за 120 дней до погашения с дисконтом 60 тыс. руб. в пользу банка. Определить величину годовой учетной ставки при временной базе 360 дней в году.

Решение.

По формуле (2.6) при $F=900; F-P=60; t=120; T=360$ дней, получим :
$d= 60\times360/(900\times120)=0,20=20\%$
Годовая учетная ставка при временной базе 360 дней в году равна 20% годовых.

Задача 4. В банк предъявлен вексель на сумму 500 тыс. руб. за полтора года до его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода – 30% годовых, следующие полгода- 36% годовых, затем каждый квартал ставка повышается на 2%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель.

Решение.

По формуле (2.8) вычислим множитель наращения:
$1- (0,5 \times 0,30 +0,5 \times 0,36 + 0,25 \times 0,38 + 0,25 \times 0,4) = 0,475$
$P = 500 \times 0,475 = 237,50$
Сумма, полученная владельцем векселя равна *237 500 руб.*
По формуле 1.11 дисконт равен $D = 500- 237,5 = 262,5$
Дисконт банка равен *262 500 руб.*

Задача 5. Банк 1 января учел два векселя со сроками погашения 6 февраля и 14 марта того же года. Применяя учетную ставку 10% годовых, банк удержал комиссионные в размере 1000 руб. Определить номинальную стоимость векселей, если номинальная стоимость второго векселя в 2 раза больше, чем номинальная стоимость первого векселя.

Решение

Обозначим номинальную стоимость первого векселя через F, тогда номинальная стоимость второго векселя составит $2\cdot F$.
По таблице порядковых дней в году определим, что первый вексель учтен за 36 дней до срока погашения, а второй вексель учтен за 72 дней до срока погашения.
По формуле (2.5) величина дисконта для первого векселя равна

$$D_1 = F \cdot n \cdot d = F \cdot \frac{36}{360} \cdot 0{,}1 = 0{,}01 \cdot F$$

По формуле (2.5) величина дисконта для второго векселя равна

$$D_2 = 2F \cdot n \cdot d = 2F \cdot \frac{72}{360} \cdot 0{,}1 = 0{,}04 \cdot F$$

Учитывая, что комиссионные банка за учет двух векселей составили 1000 руб., запишем:

$$D_1 + D_2 = 1000$$

$$0{,}01F + 0{,}04F = 1000$$

$$F = 20000$$

Номинальная стоимость первого векселя составит 20 тыс. руб., номинальная стоимость второго векселя составит 40 тыс. руб.

Типовые задачи с решениями.

Задача 1. На вашем счёте в банке 15 млн. руб. Банковская ставка по депозитам равна 12% годовых. Вам предлагают войти всем капиталом в организацию совместного предприятия, обещая удвоение капитала через 5 лет. Принимать ли это предложение?

Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.1.).

Если мы вложим деньги в банк, то через 5 лет получим следующую сумму:

$F = 15 \cdot (1 + 0{,}12)^5 = 26{,}43$ *млн.руб.*

Если мы войдем всем капиталом в организацию совместного предприятия, то наш капитал удвоится:

$F = 15 \times 2 = 30$ *млн. руб*.

Следует принять данное предложение и не вкладывать деньги в банк.

Задача 2. Через 2 года ваш сын будет поступать в университет на коммерческой основе. Плата за весь срок обучения составит 5600 долл., если внести её в момент поступления в университет. Вы располагаете в данный момент суммой в 4000 долл. Под какую минимальную ссудную ставку нужно положить деньги, а банк, чтобы накопить требуемую сумму?

Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.7) при $m=1$:

$r = (5600 / 4000)^{1/2} - 1 = 0{,}1832 = 18{,}32\%$

Для того чтобы накопить нужную сумму, минимальная ссудная сложная ставка должна составлять 18,32 % годовых.

Задача 3. За выполненную работу предприниматель должен получить 600 тыс. руб. Заказчик не имеет возможности рассчитаться в данный момент и предлагает отложить срок уплаты на 2 года, по истечении которых он обязуется выплатить 730 тыс. руб. Выгодно ли это предпринимателю, если приемлемая норма прибыли составляет 10%? Какова минимальная ставка, которая делает подобные условия невыгодными для предпринимателя?

Решение.

Для решения задачи используем формулу (3.1).

Будущая стоимость 600 тыс.руб. через 2 года при норме прибыли 10% составит:

$F = 600$ *тыс.руб.* $(1 + 0{,}1)^2 = 720{,}6$ *тыс.руб.*

Это меньше, чем 730 тыс. руб., поэтому предпринимателю выгодно ждать расчета 2 года.

Для расчета минимальной ставки, которая делает условия невыгодными, воспользуемся формулой (2.6) при $m=1$:

$r = (730 / 600)^{1/2} – 1 = 0{,}1030 = 10{,}3\ \%$

Минимальная ставка, которая делает условия невыгодными для предпринимателя, равна 10,3 % годовых.

Задача 4. Банк предоставил ссуду в размере 5000 долл. на 39 месяцев под 10% годовых на условиях полугодового начисления процентов. Рассчитайте возвращаемую сумму при различных схемах процентов: 1) схема сложных процентов; 2) смешанная схема.

Решение

Для решения воспользуемся формулами для вычисления наращенной суммы, если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет.

1) Схема сложных процентов - формула (3.4), считая полугодие базовым периодом;

$w=6;\ f = 3{,}25\times2-6=0{,}5;\ r=5\%:$

$F = 5000 \times(1+0{,}05)^{6+0{,}5}=6865{,}9$

По схеме сложных процентов возвращаемая сумма равна 6865, 9 долл.

2) Смешанная схема – формула (3.5), считая полугодие базовым периодом;

$w=6;\ f = 3{,}25\times2-6=0{,}5;\ r=5\%:$

$F = 5000 \cdot(1+0{,}05)^{6}\cdot(1+0{,}5\times0{,}05) = 6867{,}99$

По смешанной схеме возвращаемая сумма равна 6867,99 долл.

Задача 5. 1 августа 2010 г. должник обязан уплатить кредитору 400 тыс. руб. Какую сумму необходимо иметь должнику, если он вернет деньги : 1) января 2010 г.; 2) 1 января 2011 г.; 3) 1 августа 2010 г.? Деньги взяты в долг под сложную ссудную ставку 34% годовых.

Решение.

1) используем формулу (3.2) при r=0,34; n=7/12:

$$P = 400 / (1 + 0{,}34)^{7/12} = 337{,}22$$

1 января 2010 г. должник должен иметь 337 220 руб.

2) используем формулу (2.1) при r=0,34; n=5/12:

$$F = 400 \cdot (1 + 0{,}34)^{5/12} = 451{,}87$$

1 января 2011 г. должник должен иметь 451 870 руб.

3) 1 августа 2010 г. должник должен иметь 400 000 руб.

Лабораторная работа № 4. Сложные учетные ставки

Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется в ситуации предварительного начисления сложного процента, т.е. когда сложный процент (например, за кредит) начисляется в момент заключения финансового соглашения. В этом случае в начале каждого периода начисления проценты начисляются не на одну и ту же величину (как при дисконтировании по простой учетной ставке), а каждый раз на новую, полученную в результате дисконтирования, осуществленного в предыдущем периоде.

Для лица, осуществляющего предварительное начисление процентов более выгода сложная учетная ставка, если срок учета менее одного года; более выгодна простая учетная ставка, если срок учета превышает один год.
Если продолжительность финансовой операции не равна целому числу лет, то при определении стоимости учетного капитала используют либо сложную учетную ставку, либо смешанную схему (сложная учетная ставка для целого числа лет и простая учетная ставка для дробной части года). Стоимость учетного капитала больше при использовании смешанной схемы.

Начисления сложных процентов могут быть дискретными и непрерывными. Уменьшая период начисления и увеличивая частоту начисления процентов переходят к так называемому непрерывному проценту, при котором наращенная сумма (при схеме сложных процентов) увеличивается максимально. Формулы для вычисления наращенной суммы при начислении ссудных и учетных процентов совпадают, т.к. при уменьшении периода начисления разница между начислением процентов в начале и в конце периода исчезает. Непрерывную ставку начисления процента обозначают d и называют *силой роста*.

Цель проведения занятия- научиться проводить расчеты по схеме сложных ссудных процентов, используя формулы финансовых вычислений; провести сравнение финансовых операций при использовании простых и сложных ставок.

Основные формулы

$$P = F(1-d)^n \quad (4.1)$$

$$F = P/(1-d)^n \quad (4.2)$$

$$P = F\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m \cdot n} \quad (4.3)$$

$$P = F \cdot (1-d)^{w+f} \quad (4.4)$$

$$P = F \cdot (1-d)^w (1-f \cdot d) \quad (4.5)$$

$$P = F \cdot \prod_{i=1}^{k} (1-d_i)^{n_i} \quad (4.6)$$

$$d = m\left[1-\left(\frac{P}{F}\right)^{\frac{1}{m \cdot n}}\right] \quad (4.7)$$

$$n = \frac{\ln\frac{P}{F}}{m\ln(1-\frac{d}{m})} \quad (4.8)$$

$$F = P \cdot e^{\delta n} \quad (4.9)$$

$$P = Fe^{-\delta n} \quad (4.10)$$

где

F – наращенная сумма;

P- вложенная сумма;

n- количество лет;

d- сложная учетная ставка;

δ – непрерывная ставка

m- количество начислений процентов в году;

w- целая часть периода финансовой операции;

f- дробная часть периода финансовой операции.

Типовые задачи с решениями

Задача 1.Вексель на сумму 70 тыс. руб. со сроком погашения через 4 года учтен за 32 месяца по сложной учетной ставке 24% годовых. Определить суммы, которые получит предъявитель векселя при различных способах учета.

Решение

1) При применении схемы сложных процентов воспользуемся формулой (4.4) при n = 32/12= 8/3, F = 70 тыс. руб., d = 0,24, поэтому

$$P = 70(1-0,24)^{\frac{8}{3}} = 33,672$$

Владелец векселя получит 33 672 руб.

2) При применении смешанной схемы воспользуемся формулой (4.4) при w = 2, f = 2/3:

$$P = 70(1-0,24)^{2}\ (1-\frac{2}{3}\cdot 0,24) = 33,963$$

Владелец векселя получит 33 672 руб.

Задача 2.Долговое обязательство на выплату 46 тыс. руб. учтено за 4 года до срока погашения. Определите сумму, полученную при учете этого обязательства, если производилось 1) полугодовое; 2) поквартальное; 1) ежемесячное дисконтирование по сложной учетной ставке 24% годовых.

Решение

1) Используем формулу (4.3) при F = 46; d = 0,24; n = 4; m = 2

$$P = 46(1-\frac{0,24}{2})^{2\cdot 4} = 16,543$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 16 543 руб.

2) Используем формулу (4.3) при F = 46; d = 0,24; n = 4; m =

$$P = 46(1-\frac{0,24}{4})^{4\cdot 4} = 17,092$$

4:

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17092 руб.

3) Используем формулу (4.3) при F = 46; d = 0,24; n = 4; m = 12:

$$P = 46(1-\frac{0,24}{12})^{12\cdot 4} = 17,443$$

Сумма, полученная при учете обязательства, равна 17443 руб.

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что с ростом числа осуществлений операций дисконтирования в году сумма, полученная при учете обязательства, возрастает.

Задача 3.Вексель был учтен за 2,5 года до срока его погашения, при этом владелец векселя получил четверть от написанной на векселе суммы. По какой годовой учетной ставке был учтен этот вексель, если производилось 1) поквартальное дисконтирование; 2) ежемесячное дисконтирование.

Решение

1) по формуле (4.7) при *P=0,25F; n=2,5; m=4*, получим :

$$d = 4 \cdot [1 - 0{,}25^{\frac{1}{4 \cdot 2{,}5}}] = 0{,}5178$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке 51,78% годовых.

2) по формуле (4.7) при *P=0,25F; n=2,5; m=12*, получим :

$$d = 4[1 - 0{,}25^{\frac{1}{12 \cdot 2{,}5}}] = 0{,}5419$$

Вексель был учтен по сложной учетной ставке 54,19 % годовых.

Задача 4.Клиент имеет вексель на 100 тыс. руб., который он хочет учесть 01.03.2010 в банке по сложной учетной ставке равной 7% годовых. Какую сумму он получит, если срок погашения векселя 01.08.2010 г.?

Решение

Срок даты учета до даты погашения векселя равен 153 дня, число дней в году 365. По формуле (4.1) при F*=100; d=0,07; n=153/365*

$$P = 100 \cdot (1 - 0{,}07)^{153/365}$$ =97,038

Владелец векселя получит 97 038 руб.

Задача 5.Вклад в размере 20 тыс. руб. помещен в банк на 5 лет, причем предусмотрен следующий порядок начисления сложных процентов по плавающей годовой учетной ставке : в первые 2 года –16%, в следующие 2 года - 19%, в оставшийся год- 23%. Определить наращенную сумму. При использовании какой постоянной сложной учетной ставки можно получить такую же сумму?

Решение

По формуле (4.6) при *d1 = 16%, d2 = 19%, d3 = 23%* получаем:

$$F = \frac{20}{(1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2(1-0{,}23)} = 56{,}106$$

Наращенная сумма равна 56106 руб.

Постоянную годовую учетную ставку d, дающую тот же результат, находим из равенства:

$$(1-d)^5 = (1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2(1-0{,}23)$$

d = 0,1864

Постоянная ставка, которая дает тот же результат, равна 18,64% годовых.

Задачи для подготовки к лабораторным работам

Задача 1. Вексель на сумму 800 тыс. руб. учитывается за 2 года до срока погашения. Какую сумму получит предъявитель векселя при учете по сложной учетной ставке 20% годовых?

Задача 2. Определите дисконтированную сумму при учете 100 тыс. руб. по простой и сложной учетной ставкам, если годовая ставка равна 18% годовых и учет происходит за 30 дней, 180 дней, 1 год, 3 года, 5 лет. Полагать год равным 360 дней.

Задание на выполнение лабораторной работы 4. Сложные учетные ставки.

Контрольные вопросы

1. Чему равен множитель дисконтирования при дисконтировании по сложной учетной ставке?

2. Может ли учет по сложной учетной ставке привести к отрицательным значениям?

3. Что происходит с величиной учтенного капитала, если растет число осуществлений операций дисконтирования по сложной учетной ставке?

Задача 1.За долговое обязательство в 80 тыс. руб. банком было выплачено 62 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась годовая сложная учетная ставка 28% годовых ?

Задача 2.Найдите величину дисконта, если долговое обязательство на выплату 4 млн. руб. учтено за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 1) 20% годовых; 2) 25% годовых.

Задача 3.Долговое обязательство было учтено по номинальной учетной ставке 32% годовых при полугодовом дисконтировании. За какое время до срока погашения было учтено обязательство, если его дисконтированная сумма составила треть от суммы, которую нужно выплатить по этому обязательству?

Задача 4.Согласно финансовому соглашению банк начисляет по полугодиям проценты на вклады по сложной учетной ставке 28% годовых. Определить в виде простой учетной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении 1) на 3 месяца; 2) на год.

Лабораторная работа № 5. Эквивалентные и эффективные ставки

Один и тот же финансовый результат можно получить различными способами, используя различные ставки.

Две ставки называются эквивалентными, если при замене одной ставки на другую финансовые отношения сторон не меняются.

Эффективная процентная ставка позволяет сравнивать финансовые операции с различной частотой начисления и неодинаковыми процентными ставками. Именно эта ставка характеризует реальную эффективность операции, однако во многих финансовых контрактах речь чаще всего идет о номинальной ставке, которая в большинстве случаев отличается от эффективной.

Меняя частоту начисления процентов или вид ставки, можно существенно влиять на эффективность операции. В частности, оговоренная в контракте ставка может при определенных условиях вовсе не отражать истинный относительный доход (относительные расходы). Например, 6% годовых при условии ежедневного начисления процентов соответствуют на самом деле 8,21%, начисляемых ежегодно. Отмеченная особенность исключительно значима в условиях высоких номинальных ставок. При составлении финансовых договоров данный прием нередко используется для сокрытия истинных расходов. Поэтому, заключая контракт, целесообразно уточнять, о какой ставке (процентной, учетной, эффективной и др.) идет речь или, по крайней мере, отдавать себе отчет в этом.

Цель выполнения лабораторной работы- научиться проводить расчеты по замене ставок и условий финансовых контрактов, используя формулы финансовых вычислений; сравнивать эффективность различных финансовых операций.

Основные формулы

$r_e = (1 + r/m)^m - 1$ (5.1)

$r_e = e^d - 1$ (5.2)

$$\delta = m \cdot Ln(1 + r/m) \quad (5.3)$$

$$r = m \cdot [(1 + r_e)^{1/m} - 1] \quad (5.4)$$

$$d_e = 1 - (1 - d/m)^m \quad (5.5)$$

$$d = m \cdot [1 - (1 - d_e)^{1/m}] \quad (5.6)$$

$$r = \frac{d}{1 - nd} \quad (5.7)$$

$$d = \frac{r}{1 + nr} \quad (5.8)$$

$$r_c = \frac{d_c}{1 - d_c} \quad (5.9)$$

$$d_c = \frac{r_c}{1 + r_c} \quad (5.10)$$

$$r = \frac{(1+\frac{r(m)}{m})^{m\cdot n} - 1}{n} \quad (5.11)$$

$$d = \frac{1-(1-\frac{d(m)}{m})^{m\cdot n}}{n} \quad (5.12)$$

где

r_e – эффективная ставка,

e^{δ} – сила роста,

r - простая процентная ставка,

d - простая учетная ставка,

r_c - сложная ссудная ставка,

d_c – сложная учетная ставка,

r(m) -сложная процентная ставка с начислением процентов m раз за период,

d(m) -сложная учетная ставка с начислением процентов m раз за период,

n - продолжительность финансовой операции в годах

Типовые задачи с решениями. Задача 1.Какие условия предоставления кредита и почему более выгодны банку: 1) 28% годовых с ежеквартальным начислением процентов; 2) 30% годовых с

Задача

1.Какие условия предоставления кредита и почему более выгодны банку: 1) 28% годовых с ежеквартальным начислением процентов; 2) 30% годовых с полугодовым начислением процентов?

Решение

Рассчитаем эффективную годовую процентную ставку для каждого варианта.

1) По формуле (5.1) при $r=0,28;\ m=4$

$r_e = (1 + 0.28/4)^4 – 1 =0,3107= 31,1\%$

2) По формуле (5.1) при $r=0,32;\ 2=4$

$r_e = (1 + 0.3/2)^2 – 1 =0,3225= 32,25\%$

Для банка выгоднее предоставлять кредит по варианту 2), так как в этом случае эффективная годовая ставка выше (предоставлять кредит под 32,25% годовых выгоднее, чем под 31,1%).

Задача 2.Срок уплаты по долговому обязательству – полгода, простая учетная ставка – 18% годовых . Какова доходность этой операции, измеренная в виде простой ставки ссудного процента?

Решение

По формуле (5.7) при $d=0,18;\ n=0,5$

$r = 0,18 / (1-0,5×0,18) =0, 198.$

Доходность операции, выраженная в виде простой ставки ссудного процента, равна 19,8% годовых.

Задача 3. Определить, под какую ставку ссудных процентов выгоднее поместить капитал в 10 млн. руб. на пять лет – под простую ставку 14% годовых или под сложную ставку 12% при ежеквартальном начислении процентов?

Решение.

В данном случае можно не считать наращенную сумму, поэтому не важна величина первоначального капитала. Достаточно, например, найти простую процентную ставку, эквивалентную данной сложной ставке, воспользовавшись формулой эквивалентности по формуле (5.11) при *r(m)=0,12; n=5; m=4:*

$$r = \frac{(1+\frac{00{,}12}{4})^{4\cdot 5}-1}{5} = 0{,}1612$$

Так как простая процентная ставка 16,12% , которая дала бы одинаковый результат с данной сложной процентной ставкой больше предложенной ставки в 14%, ясно, что предпочтительнее использовать сложную процентную ставку. Чтобы убедиться, насколько сложная ставка выгоднее, определим наращенные суммы:

F (14%) = 17

F (16,12%) = 22,04

Владелец капитала в 10 млн. руб. за 5 лет может накопить 17 млн. руб. с использованием простой ставки 14% годовых; с использованием сложной ставки 12% годовых при ежеквартальном начислении процентов можно накопить 22,04 млн. руб.

Задача 4.На капитал в сумме 500 тыс. руб. ежегодно начисляются сложный проценты по ставке 8% годовых в течение 5 лет. Определить эквивалентную ставку непрерывного начисления процентов (силу роста).

Решение.

По формуле (5.2) при *r=0,08; m=1*

$$\delta = Ln(1+0{,}08) = 0{,}077$$

Таким образом, ежегодное начисление процентов по ставке 8% эквивалентно непрерывному начислению процентов по ставке 7,7 %.

Задача 5.Определить номинальную ставку, если эффективная ставка равна 9 % и сложные проценты начисляются ежемесячно.

Решение.

По формуле (5.4) при *r(e) =0,09; m=12*

$$r = 12 \times [(1 + 0{,}09)^{1/12} - 1] = 0{,}086$$

Таким образом, ежегодное начисление сложных процентов по ставке 9% годовых дает тот же результат, что и ежемесячное начисление сложных процентов по ставке 8,6 %.

Задачи для подготовки к занятию.

Задача

1.Определить номинальную учетную ставку, если годовая эффективная учетная ставка равна 20% годовых и учет осуществляется 1) каждые полгода; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно.

Задача 2.Ссуда выдана при условии начисления сложных процентов по ставке 8 % годовых. Определить эквивалентную простую ставку при сроке ссуды 5 лет, 180 дней, 365 дней.

Задача 3.Банком выдан кредит на 9 месяцев под 24% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определите величину простой учетной ставки, обеспечивающей такую же величину начисленных процентов.

Задание на лабораторное занятие

5. Эффективные и эквивалентные ставки.

Контрольные вопросы

1. Какая ставка называется эффективной? От каких параметров она зависит?
2. Как изменяется эффективная ставка с ростом количества начислений сложных процентов в году?
3. В каком случае эффективная ссудная ставка совпадает с номинальной?
4. Какие ставки называются эквивалентными?

Задача 1.Вексель учитывается за 180 дней до срока погашения по простой учетной ставке 10 % годовых. Какова доходность этой операции для банка, выраженная по сложной учетной ставке?

Задача 2.Банк учитывает вексель за 300 дней до срока погашения по сложной учетной ставке 10% годовых при временной базе 360 дней. Какая простая годовая процентная ставка должна быть применена при выдаче кредита, если используется временная база 365 дней и банк хочет получить такой же доход?

Задача 3. Банк выдает ссуду под сложную процентную ставку 20% годовых. Какую простую годовую процентную ставку должен установить банк, чтобы его доход не изменился, если начисление процентов происходит а) по полугодиям; б) каждые 2 месяца; в) каждую неделю.

Задача 4. Определить номинальную годовую учетную ставку с дисконтированием 4 раза в год, эквивалентную номинальной годовой учетной ставке 12% с дисконтированием 12 раз в год.

Занятие 6. Замена и консолидация платежей

На практике часто возникают ситуации, когда участники сделки вынуждены изменять условия ранее заключенного финансового соглашения. В результате изменений условий контракта ни один из его участников не должен терпеть убытков, поэтому в таких ситуациях также составляется **уравнение эквивалентности**.

Согласно уравнению эквивалентности сумма нового и старого платежей приводится к одному моменту времени. Для краткосрочных контрактов процесс приведения осуществляется, как правило, на основе простых ставок. При использовании сложных ставок время приведения контрактов не имеет значения.

При консолидации платежей возникают две задачи: 1) определение величины консолидированного платежа при известном сроке, когда этот платеж должен быть сделан; 2) определение срока известного консолидированного платежа.

Обе задачи решаются с использованием уравнения **эквивалентности контрактов**. Два контракта считаются эквивалентными**,** если потоки платежей по этим контрактам, приведенные к одному моменту времени, одинаковы.

При замене или объединении платежей используется принцип эквивалентности: ни одна из сторон финансовой сделки не должна казаться в убытке или получить дополнительную прибыль.

Цель проведения занятия- научиться проводить расчеты по замене ставок и условий финансовых контрактов, используя формулы финансовых вычислений и электронные таблицы EXCEL.

Основные формулы

Рассмотрим ситуацию, когда платеж P_1 со сроком уплаты n_1 заменяется на платеж P_0 со сроком уплаты n_0

Простые ссудные ставки

Формула для нахождения величины нового платежа при использовании простой ссудной ставки:

$$P_0 = P_1[1 + (n_0 - n_1)r], n_0 > n_1$$

$$P_0 = \frac{P_1}{1 + (n_1 - n_0)}, n_0 < n_1$$

Формула для нахождения срока нового платежа, если

$$P_0 > P_1, n_0 > n_1$$

$$n_0 = n_1 - \frac{1}{r}(\frac{P_1}{P_0} - 1)$$

$$P_0 < P_1, n_0 < n_1$$

$$n_0 = n_1 + \frac{1}{r}(\frac{P_0}{P_1} - 1)$$

Формула для нахождения срока нового платежа, если Формула для определения величины консолидированного платежа при использовании простой ссудной ставки

$$P_0 = \sum_{k=1}^{m} P_k[1 + |n_0 - n_k| r]^{sign(n_0 - n_k)}$$

$$P_0 > P_1, n_0 > n_1$$

Формула для определения срока консолидированного платежа при использовании простых ссудных ставок

$$\frac{P_0}{1+n_0 r}=\sum_{k=1}^{m}\frac{P_k}{1+n_k r}$$

Сложные ссудные ставки

Формула для нахождения величины нового платежа при использовании сложной ссудной ставки:

$$P_0=P_1(1+r)^{(n_0-n_1)}$$

Формула для нахождения срока нового платежа

$$n_0=n_1+\frac{Ln\frac{P_0}{P_1}}{Ln(1+r)}$$

Формула для определения величины консолидированного платежа

$$\frac{P_0}{(1+r)^{n_0}}=\sum_{k=1}^{m}\frac{P_k}{(1+r)^{n_k}}$$

Формула для определения срока консолидированного платежа

$$n_0=\frac{Ln\frac{P_0}{\sum P_k(1+r)^{-n_k}}}{Ln(1+r)}$$

Типовые задачи с решениями.

Задача

1.Согласно новому финансовому соглашению платеж в 100000 руб. со сроком уплаты через 1 год заменяется платежом со сроками уплаты 1) через полгода;

2) через два года. Определить величину нового платежа, если используется простая ставка 20 % годовых.

Решение

1) Так как срок нового платежа меньше года, то его величина — это дисконтированная стоимость 100000 руб., срок дисконтирования — 0,5 года, поэтому величина нового платежа равна:

100 000 / (1 + 0,5 ·0,2) = 90 909 руб.

2) Так как срок нового платежа больше года, то его величина — это будущая стоимость 100000 руб., наращение происходит один год по ставке 20 % годовых, поэтому величина нового платежа равна:

100 000 · (1+1·0,2)= 120 000 руб.

Задача 2.Найти величину нового срока, если платеж в 100 000 руб. с уплатой через 250 дней заменяется платежом в 95 000 руб. Используется простая ставка 10 % годовых.

Решение

Так как сумма нового платежа меньше 100 000 руб., поэтому новый срок должен быть также меньше 250 дней.

Графически это можно показать следующим образом:

Будем приводить потоки платежей по новому и старому контракту к моменту времени 250 дней.

Тогда на сумму в 95 000 руб. должны начисляться простые проценты по ставке 10 % в течение (250 – x) дней и наращенная сумма должна равняться 100 000 руб. Составляем уравнение эквивалентности

$$95000 \times (1 + 0{,}1 \times (250 - x) / 360)) = 100000,$$

$$x = 60{,}5 \text{ дней.}$$

Проверим этот результат. Получив через 60,5 дней 95000 руб. и вложив их в банк на срок (250 – 60,5) дней, получим

$$95000 \times (1 + 0{,}1 \times (250 - 60{,}5) / 360) = 100000 \text{ руб.}$$

Заметим, что платеж в 100000 руб. нельзя заменить любым меньшим по величине платежом. Величина нового платежа не может быть меньше, чем сумма 100000 руб., приведенная к начальному моменту времени, т. е. меньше, чем 100000 / (1+ 0,1 × 250/360) = 93500 руб.

Задача 3. Два векселя номинальной стоимостью 20000 руб. и 30000 руб. и сроком погашения 1 июня и 1 сентября заменяются одним с продлением срока погашения до 1 октября. При объединении используется простая учетная ставка 10 % годовых. Определить номинальную стоимость нового векселя.

Решение

Поскольку срок погашения нового векселя позже, чем сроки погашения объединяемых векселей, то на сумму 20000 руб. в течение 122 дней (с 1 июня по 1 октября) происходит наращение капитала по простой учетной ставке 10 %; на сумму 30000 руб. в течение 30 дней (с 1 сентября по 1 октября) также происходит наращение капитала по простой учетной ставке 10 % годовых. Поэтому номинальная стоимость нового векселя равна:

$$F = 20000 \cdot (1 - 122/360)^{-1} + 30000 \cdot (1 - 30/360)^{-1} = 62979{,}4 \text{ руб.}$$

Задача 4. Платежи в 6000, 4000 и 10000 руб. должны быть погашены соответственно через 90, 165 и 270 дней. Кредитор и должник согласились заменить три платежа одним через 120 дней. Найти величину консолидированного платежа, если используется простая процентная ставка 38% годовых и в расчет принимаются обыкновенные проценты.

Решение

Приведем все платежи к моменту погашения консолидированного платежа, т.е. к 120 дням. Тогда на платеж в 6000 руб., срок погашения которого меньше 120 дней, будут начисляться простые проценты за период в 120-90=30 дней, платеж в 4000 руб. необходимо дисконтировать на срок в 165-120=45 руб., платеж в 10000 руб. необходимо дисконтировать на срок 270-120=150 дней.

Складывая суммы приведенных платежей, получим уравнение для определения величины консолидированного платежа:

$$X = 6000 \cdot (1 \div \frac{30}{360} \cdot 0{,}38) + \frac{4000}{1 + \frac{45}{360} \cdot 0{,}38} + \frac{10000}{1 + \frac{150}{360} \cdot 0{,}38}$$

поэтому X=18642 руб.

Если бы за дату приведения выбрали время выплаты платежа в 6000 руб., то получили бы следующее уравнение:

$$\frac{X}{1 + \frac{30}{360} \cdot 0{,}38} = 6000 + \frac{4000}{1 \div \frac{75}{360} \cdot 0{,}38} + \frac{10000}{1 \div \frac{180}{360} \cdot 0{,}38},$$

откуда X=18683 руб.

Приводя все платежи к начальному моменту времени, получим уравнение:

$$\frac{X}{1 + \frac{120}{360} 0{,}38} = \frac{6000}{1 \div \frac{90}{360} 0{,}38} \div \frac{4000}{1 + \frac{165}{360} 0{,}38} \div \frac{10000}{1 + \frac{270}{360} \cdot 0{,}38},$$

откуда X=18780 руб.

Поэтому при выборе финансового соглашения в случае использования простых процентов необходимо оговорить дату, на которую будет осуществляться приведение всех сумм.

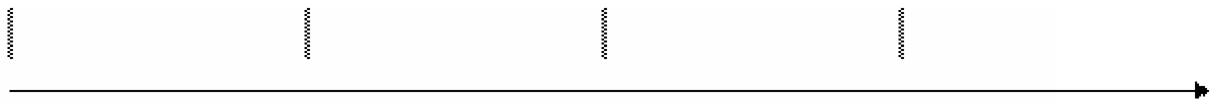
Задача 5.Согласно контракту предприниматель должен выплатить кредитору 100 000 руб. через год, 200 000 руб. через два года и 400 000 руб.

через 3 года. Предприниматель планирует выплатить через 2 года 300 000 руб., оставшуюся сумму долга вернуть через 4 года. Какую сумму предприниматель должен будет выплатить через 4 года, если в расчетах используется сложная ставка 20% годовых?

Решение.

Изобразим схему выплат на графике. Под осью отметим платежи по старому соглашению, над осью – по новому контракту.

300 000   x



100 000 200 000 400 000

Величину неизвестного платежа находим из условия эквивалентности контрактов. Приведенные стоимости платежей по старому контракту необходимо приравнять к приведенным стоимостям потоков платежей по новому контракту и из полученного уравнения определить неизвестную величину нового платежа.

$$\frac{100000}{(1+0,2)}+\frac{200000}{(1+0,2)^2}+\frac{400000}{(1+0,2)^3}=\frac{300000}{(1+0,2)^2}+\frac{X}{(1+0,2)^4}$$

X= 508 800 руб.

В случае сложных ставок результат не зависит от момента времени, для которого составляется уравнение эквивалентности контрактов. Действительно, если все платежи приводить к моменту окончания года 4, уравнение примет вид:

$$100\cdot(1+0.2)^3+200\cdot(1+0,2)^2+400(1+0.2)=300\cdot(1+0,2)^2+X$$

Разделив это обе части уравнения на $(1+0,2)^4$, получим первоначально составленное уравнение.

Задачи для подготовки к занятию. Задача 1.В банк для учета предъявлены 2 векселя - один на сумму в 100 тыс

Задача

1.В банк для учета предъявлены 2 векселя - один на сумму в 100 тыс. руб. и сроком погашения через год, второй – на сумму 150 тыс. руб. и сроком погашения через 2 года. Два векселя необходимо заменить одним, на сумму 250 тыс. руб. Определить срок погашения нового векселя при использовании сложной учетной ставки 20% годовых.

Задача 2.Платежи на сумму 300 000 руб., 400 000 руб. и 400 000 руб. должны быть внесены через три месяца, полгода и 9 месяцев соответственно. Достигнуто соглашение о замене этих платежей на один, равный им по сумме. Определить срок нового платежа, если используется простая ссудная ставка 15 % годовых.

Задача 3.Согласно контракту, предприниматель должен выплатить кредитору 10 тыс. руб. через год, 40 тыс. руб. через три года и 30 тыс. руб. через 5 лет. Предприниматель предлагает выплатить 30 тыс. руб. через 2 года и 40 тыс. руб. через 4 года. Являются ли эти контракты эквивалентными, если в расчетах используется простая процентная ставка 34% годовых?

Задача 4.Три платежа: 10 000 долл., срок погашения 15 мая; 20 000 долл., срок погашения 15 июня; 15 000 долл., срок погашения 15 августа заменяется одним платежом со сроком погашения 1 августа на основе простой процентной ставки. Определить сумму нового платежа.

Задание к лабораторной работе

6. Замена и консолидация платежей.

Контрольные вопросы

1. Что означает консолидация платежей?

2. Верно ли утверждение: при сравнении платежей их приведение к одному моменту времени может осуществляться как путем наращения, так и путем дисконтирования?

3. При изменении сроков платежей в каком случае новый платеж будет больше старого платежа, а каком случае меньше?

4. Какие контракты являются эквивалентными?

5. Какие задачи могут возникать при консолидации платежей?

Задача 1.Контракт на выплату 10 000 долл. 1 ноября и выплату 5000 долл. 1 января следующего года необходимо заменить новым контрактом, в соответствии с которым 1 декабря выплачивается 6000 долл., оставшаяся сумма погашается 1 марта. Определить сумму второго платежа на основе простой ссудной ставки 10% годовых (следующий год не високосный).

Задача 2.Платеж в 600 тыс. руб. со сроком уплаты через 4 года необходимо заменить платежом со сроком уплаты 1) через 2 года; 2) через 5 лет. Используется сложная ссудная ставка 12% годовых. Найти величину нового платежа.

Задача 3.Два кредита на сумму 100 тыс. евро и 50 тыс. евро должны быть погашены 17 ноября текущего года и 10 января следующего года соответственно. Банк согласился с предложением заемщика пересмотреть условия договора: 1 декабря текущего года заемщик выплачивает 70 тыс. евро, оставшаяся часть долга будет внесена 1 марта следующего года. При пересмотре договора используется простая ставка 10% годовых. Определить вариант приведения срока платежа, наиболее выгодный для банка и для заемщика.

Задача 4.Предприниматель получил кредит в банке на сумму 500 тыс. руб. на полгода по простой ставке 18% годовых. Спустя месяц после выдачи кредита предприниматель обратился в банк с просьбой вернуть долг не через полгода, а через 9 месяцев, в сумме 595 тыс. руб. Выгодно ли это предложение для банка? Какую сумму предприниматель должен внести через 9 месяцев, чтобы условия контракта не изменились?

Задача 5.В настоящее время у предприятия имеется задолженность банку по трем кредитам в размере 130 тыс., 190 тыс., 165 тыс. руб. со сроками погашения соответственно через 45, 95 и 200 дней. Предприятие предлагает погасить задолженность одним платежом через срок (кредитный срок выбирается согласно варианту) от сегодняшней даты. Процентная ставка по кредиту составляет 15%. Временная база 365 дней. Определить сумму консолидированного платежа.

Задача 6.Имеется обязательство погасить с 20.02.06 по 20.11.06 долг в размере 1,5 млн. рублей. Кредитор согласен получать частичные платежи по погашению кредита и фактическую базу начисления процентов. Процентная ставка составляет 20% годовых. В счет погашения задолженности планируются следующие промежуточные поступления:

20.03.06 – 500 тыс. рублей

20.05.06 – 300 тыс. рублей

20.08.06 – 200 тыс. рублей

Найти сумму окончательного платежа по погашению долга.

Лабораторная работа № 7. **Начисление процентов в условиях инфляции**

Для оценки наращенной суммы с учетом ее обесценения полученную величину делят на индекс инфляции за время осуществления наращения. Если множитель наращения равен индексу инфляции, то соответствующее наращение лишь нейтрализует действие инфляции.

При инфляции выделяют следующие виды процентных ставок: номинальную, реальную, положительную. Иногда ставку с поправкой на инфляцию называют брутто-ставкой.

Для обеспечения реального роста стоимости первоначального капитала при инфляции необходимо исходную ставку увеличивать (индексировать). Выбор величины такой индексированной ставки определяется поставленными целями. Для обеспечения реальной доходности согласно исходному коэффициенту наращения необходимо так индексировать исходную ставку (увеличить на инфляционную премию), чтобы новый коэффициент наращения полностью компенсировал потери из-за инфляции.

Формула Фишера определяет значение сложной годовой процентной ставки, обеспечивающей при известном годовом темпе инфляции реальную эффективность кредитной операции. Эта формула по существу показывает ту величину, называемую инфляционной премией, которую необходимо прибавить к исходной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. При малом темпе инфляции и невысокой процентной ставке (эта ситуация типична для стран с развитой рыночной экономикой) пользуются и приближенным вариантом формулы Фишера.

Цель проведения занятия - научиться рассчитывать доходность финансовых операций в условиях инфляции, используя формулы финансовых вычислений.

Основные формулы раздела

Индекс инфляции

$$I_и = (1 + \alpha_m)^m. \quad (7.1)$$

$$I_и = (1 + \alpha)^{n_a} \cdot (1 + n_b \alpha), \quad (7.2)$$

где $n = n_a + n_b$, n_a — целое число лет, n_b — оставшаяся нецелая часть года

Введем следующие обозначения для брутто-ставок:

r_{α} —простая ссудная ;

d_{α}—простая учетная

$r_{c\alpha}$—сложная ссудная

$d_{c\alpha}$—сложная учетная

Вычисление брутто-ставки процентов в условиях инфляции

$$r_{\alpha} = \left[(1 + nr) \cdot I_{и} - 1\right]/n. \quad (7.3)$$

$$d_{\alpha} = (I_{и} - 1 + nd)/(n \cdot I_{и}). \quad (7.4)$$

$$r_{c\alpha} = m \cdot \{(1 + r_c / m)\sqrt[m \cdot n]{I_{и}} - 1\} \quad (7.5)$$

$$d_{c\alpha} = m \cdot \{1 - (1 - d_c / m) / \sqrt[n \cdot m]{I_{и}}\} \quad (7.6)$$

Формулы для вычисления реальной доходности финансовой операции, когда задан уровень инфляции и брутто ставка

$$r = \left(\frac{1 + r_{\alpha}}{I_{И}} - 1\right) / n \quad (7.7)$$

$$r_c = (1 + r_{c\alpha}) / \sqrt[n]{I_{и}} - 1 \quad (7.8)$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1. На вклад начисляются сложные проценты: 1) ежегодно; 2) ежеквартально; 3) ежемесячно. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежемесячный темп инфляции составляет 3%?

Решение

1) Обозначим через $I_u^{(1/12)}$ ежемесячный (т.е. за 1/12 года) индекс инфляции, тогда $I_u^{(1/12)} = 1{,}03$ и при *к=12* находим индекс инфляции за год:

$$I_u^{(1)} = (I_u^{(1/12)})^{12} = 1{,}03^{12} = 1{,}4258$$

Пусть r - процентная ставка при ежегодном начислении сложных процентов, тогда значение ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, находится из равенства $1 + r = I_u^{(1)}$ (т.е. множитель наращения за год приравнивается к годовому индексу инфляции). Таким образом:

$$r = I_u^{(1)} - 1 = 1{,}4258 - 1 = 0{,}4258 = 42{,}58\%$$

Реальное наращение капитала будет происходить только при процентной ставке, превышающей 42,58% годовых.

2) При ежеквартальном начислении сложных процентов для определения номинальной ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, пользуемся равенством :

$$(1 + r(4) \quad / 4)^4 = I_p^{(1)}$$

, поэтому:

$$r(4) = 4(\sqrt[4]{I_u^{(1)}} - 1) = 0{,}3709 = 37{,}09\%$$

Реальное наращение капитала будет происходить при ежеквартальном начислении процентов по ставке не меньше, чем 37,09% годовых.

3) В случае ежемесячного начисления процентов пользуемся равенством

$$(1 + r(12)/12)^{12} = I_u^{(1)}$$

,откуда:

$$r(12) = 12(\sqrt[12]{I_{и}^{(1)}} - 1) = 0,36 = 36\%$$

Реальное наращение капитала будет происходить при ежемесячном начислении сложных процентов по ставке, не меньше, чем 36% годовых. В этом случае ответ можно было дать сразу, поскольку для осуществления реального наращения капитала его относительный рост за месяц должен превышать темп инфляции за это же время. Следовательно, $r(12)/12 > 0,03$, поэтому $r > 0,36$

Задача 2.Номинальная процентная ставка, компенсирующая действие инфляции, равна 52% годовых. Определите полугодовую инфляцию, если начисление сложных процентов осуществляется каждый квартал.

Решение

Приравняем годовой индекс инфляции к множителю наращения за год. Полагая $r(4) = 0,52$, получим :

$$I_{и}^{(1)} = (1 + r(4)/4)^4 = (1 + 0,52/4)^4 = 1,6305$$

Поэтому индекс инфляции за полгода (0,5 года) составит :

$$I_{и}^{(0,5)} = \sqrt{I_{и}^{(1)}} = \sqrt{1,6305} = 1,2769$$

Темп инфляции α находим из условия $(1+\alpha) = I$.

Темп инфляции за полгода равен 27,69%.

Задача 3.На вклад в течение трех лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция за это время за каждый год последовательно составит 15, 20 и 10 процентов. Какова должна быть сила роста за год, чтобы покупательная способность вклада не уменьшилась?

Решение

Поскольку индекс инфляции за первый год равен 1,15, за второй - 1,2 и за третий - 1,1, то индекс инфляции за 3 года составит:

$$I^{(3)}_{и} = I1 \cdot I2 \cdot I3 = 1,15 \times 1,12 \times 1,1 = 1,518$$

Пусть s - сила роста за год, позволяющая первоначальной сумме только сохранить свою покупательную способность. Приравнивая индекс инфляции за три года к множителю наращения за это же время, получим : $e^{3\cdot\delta} = I_u^{(3)}$, поэтому

$$\delta = \frac{1}{3LnI_u} = \frac{1}{3Ln1{,}518} = 0{,}1391$$

Сила роста должна превышать 13,91% за год.

Задача 4. На вклад в течение 15 месяцев начисляются проценты: 1) по схеме сложных процентов; 2) по смешанной схеме. Какова должна быть процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 8%?

Решение

1) Так как темп инфляции за каждый квартал равен 8%, то индекс инфляции за каждый квартал (0,25 года) равен 1,08. Поэтому индекс инфляции за 15 месяцев (1,25 года, или 5 кварталов) составит:

$$I_p^{(1,25)} = 1{,}08^5 = 1{,}4693$$

Обозначим через r искомую годовую процентную ставку и приравняем этот индекс инфляции к множителю наращения при использовании схемы сложных процентов:

$(1+r)^{1,25} = 1{,}4693.$

Отсюда:

$$r = 1{,}4693^{1/1,25} - 1 = 0{,}3605$$

Ставка должна превышать 36,05% годовых.

При рассмотрении этого случая можно было рассуждать и таким образом. При инфляции 8% за каждый квартал годовой темп инфляции составит $1{,}08^4-1=0{,}3605=36{,}05\%$. Реальное же наращение капитала будет происходить, если годовая процентная ставка превышает годовой темп инфляции, т.е. r > 36,05%.

2) Пусть теперь применяется смешанная схема. Приравнивая индекс инфляции за 1,25 года к множителю наращения, получим квадратное уравнение относительно *r :*

(1+r).(1+0,25r)= 1,4693

Решая уравнение, определяем корни: *r = -5,3508, r =0,3508.*

Очевидно, что по смыслу первый корень не подходит. Следовательно, при использовании смешанной схемы ставка должна превышать 35,08% годовых. «Граничное» значение ставки в этом случае получили почти на 1% меньше, чем в предыдущем, что объясняется большей эффективностью смешанной схемы начисления по сравнению со схемой сложных процентов.

Обратим внимание, что для ответа на вопрос в данном случае необходимо фактически решить неравенство:

(1+r)(1+0,25r)>1,4693

Задача 5. На вклад 280 тыс. руб. ежеквартально начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 10%. Оцените сумму вклада через 21 месяц с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции – 0,5 % в месяц.

Решение

При наращении сложными процентами при ежеквартальном начислении процентов сумма вклада составит :

$$F = 280000 \cdot (1 + 0{,}1/4)^{4 \cdot 1{,}75} = 332830$$

Индекс инфляции за 1,75 года при темпе инфляции 2% в месяц составит

$$I_и^{(1,75)} = (1 + 0{,}005)^{21} = 1{,}11$$

Величина вклада с точки зрения ее покупательной способности равна

$$F_α = \frac{F}{I_и^{(1,75)}} = \frac{332830}{1{,}11} = 299730$$

Вычитая из этой величины первоначальную сумму вклада, найдем реальный доход владельца вклада:

$$F_{\alpha} - P = 299730 - 280000 = 19730$$

Задача 6. Кредит на сумму 120 тыс.руб. выдается сроком на 3 года при условии начисления сложных ссудных процентов. Индекс цен за указанный период равен 2,5. Какова должна быть процентная ставка по кредиту, чтобы реальная доходность кредитной операции составляла 10% годовых? Рассчитайте сумму к погашению с учетом инфляции.

Решение

По формуле (7.5) при $m=1;\ r=0,1;I=2,5;n=3$

$r_{c\alpha}$ =0,4923

Поэтому ставка 49,23% при ежегодном начислении сложных процентов и индексе цен 2,5 обеспечит реальную доходность кредитора 10% годовых.

Сумму к погашению с учетом инфляции находим по формуле (3.1) (Занятие 3) при $n=3;\ r=0,4923;P=121$

$F=120(1+0,4923)^3 =399,3$

Сумма к погашению с учетом инфляции равна 399 300 руб.

Задачи для подготовки к занятию

Задача 1.На вклад в течение 18 месяцев начисляются проценты а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме. Какова должна быть годовая процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 2 %?

Задача 2.На некоторую сумму, помещенную на депозит в банк, в течение 8 лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция в это время каждый год будет составлять 1%. Какова должна быть сила роста за год, чтобы сумма вклада через восемь лет по своей покупательной способности не уменьшилась?

Задача 3.На вклад в 500 тыс. руб. каждый квартал начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 4%. Оцените сумму вклада через 3 года с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции –1 % за квартал.

Задание на практическое занятие

7. Начисление процентов в условиях инфляции

Контрольные вопросы

1. Как определяется и что характеризует темп инфляции?

2. Почему в условиях инфляции необходимо различать номинальную и реальную процентную ставки?

3. Может ли реальная процентная ставка быть отрицательной?

4. Что определяет формула Фишера?

Задача 1.На вклад начисляются сложные проценты а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Вычислить годовую номинальную процентную ставку, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежеквартальный темп инфляции составляет 2%.

Задача 2.Номинальная процентная ставка, компенсирующая при наращении инфляцию, составляет 48% годовых. Определите инфляцию за квартал, если начисление сложных процентов осуществляется каждый месяц.

Задача 3.На некоторую сумму, помещенную на депозит в банк, в течение 4 лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция в это время каждый год будет составлять 6%,7%,8% и 9%. Какова должна быть сила роста за год, чтобы сумма вклада через четыре года по своей покупательной способности не уменьшилась?

Задача 4.На вклад в 900 тыс. руб. каждые полгода начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 8%. Оцените сумму вклада через 1,5 года с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции –0,5 % за квартал.

Лабораторная работа № **8. Налоги и начисление процентов**

Налогообложение играет большую роль в экономике любой страны. Во многих странах налогом облагают проценты, полученные при помещении некоторой суммы на депозит, что уменьшает реальную наращенную сумму и реальную доходность финансовой операции.

Налоги, начисляемые на полученные проценты, уменьшают реальную доходность финансовой операции. Учет налога при определении наращенной суммы приводит к уменьшению ставки.

Введем обозначения:

t- ставка налога на проценты

T – общая сумма налога

F- наращенная сумма до выплаты налога на проценты

F_t - наращенная сумма после выплаты налога на проценты

P – вложенная сумма

n – продолжительность финансовой операции

Пусть *r* - простые ссудные проценты, тогда величина процентов, начисленных за период *n*, равна *Pnr*.

Сумма налога на начисленные проценты равна $T=Pnrt$ *(8.1)*

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$F_t = P[(1+r(1-t)n]$ *(8.2)*

Таким образом, налог на проценты уменьшает процентную ставку и вместо ставки r применяется ставка (1-t)r.

Пусть на сумму P за период времени n начислялись простые учетные проценты по учетной ставке d. Величина начисленных процентов равна Pnd/(1-nd).

Сумма налога на начисленные проценты составит

$T=Pndt/(1-nd)$ *(8.3)*

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$F_t = F-T=P(1-ndt)/(1-nd)$ *(8.4)*

Пусть r - сложные ссудные проценты, тогда величина процентов, начисленных за период n, равна $P[(1+r)^n -1]$

Сумма налога на начисленные проценты равна

$T=P[(1+r)^n -1]t$ (8.5)

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$F_t =P[(1+r)^n (1-t)+t]$ (8.6)

В случае сложных процентов налог на начисленные проценты можно выплачивать как в конце финансовой операции, так и каждый год. При этом общая сумма исчисленного налога не изменяется.

Пусть на сумму P за период времени n начислялись сложные учетные проценты по учетной ставке d. Величина начисленных процентов равна

$$\frac{P[1-(1-d)^n]}{(1-d)^n}$$

Сумма налога на начисленные проценты равна $T=\frac{P[1-(1-d)^n]}{(1-d)^n}t$ *(8.7)*

Наращенная сумма после выплаты налога на проценты равна

$F_t = P[(1-d)^{-n}(1-t)+t]$ *(8.8)*

Пусть на сумму P за период времени n начислялись непрерывные проценты по ставке δ.

Сумма налога на начисленные проценты равна $T=P(e^{\delta} -1)t$ (8.9)

$F_t =P[e^{\delta} (1-t)+t]$ (8.10)

***Цель проведения занятия** -научиться рассчитывать влияние налогов на доходность финансовых операции, используя формулы финансовых вычислений.*

Типовые задачи с решениями

Задача 1.На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые учетные проценты по ставке под 14% годовых. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

Решение

Используем формулу (8.4)при $P=300;\ n=1{,}5;\ t=0{,}12;\ d=0{,}14$

$$F_t = 300(1-1{,}5\cdot 0{,}14\cdot 0{,}12)/\ (1-1{,}5\cdot 0{,}14) = 370{,}018$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 370018 руб.

Задача 2.На депозит поместили 300 тыс. руб. на полтора года. Банк начисляет простые проценты по ставке под 16% годовых. Определить наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 12% годовых.

Решение

Используем формулу (8.2) при $P=300;\ n=1{,}5;\ t=0{,}12;\ r=0{,}16$

$$F_t = 300[1+\cdot 0{,}16\ (1-\cdot 0{,}12)1{,}5] = 360{,}336$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 360336 руб.

Задача 3.На вклад в 2 млн. руб. в течение 4 лет каждые полгода начислялись сложные проценты по годовой номинальной ставке 12% годовых. Определить наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты составляет 8% годовых.

Решение
Запишемформулу (8.6) с учетом полугодового начисления процентов:

$$F_t = P[(1+r/m)^{nm}\ (1-t)+t]$$

при $P=2;\ r=0{,}12;\ n=4;\ m=2;\ t=0{,}08$

$$F_t = 3{,}09268$$

Наращенная сумма с учетом налога на проценты составит 3 092 680руб.

Задача 4.Для участия в некотором проекте предпринимателю необходимо 280 тыс. руб. Между тем он располагает суммой 250 тыс. руб. С целью накопления необходимой суммы предприниматель собирается положить 250 тыс. руб. в банк. Предлагаемая банком ставка по вкладам равна 14% годовых. Какое количество дней необходимо для накопления требуемой суммы с учетом уплаты налога на проценты, если банк начисляет простые проценты, использует точный процент с точным числом дней, а ставка налога на проценты равна 1%?

Решение

Обозначим через X необходимое число дней, тогда формула (8.2) запишется в виде:

$F_t = P[(1+r(1-t)X/ 365]$

При $F_t = 280;\ P=250;\ r=0{,}14;\ t=0{,}01$

$280=250\cdot[1+0{,}014\cdot(1-0{,}01)X / 365]$

Решая полученное уравнение относительно X, получаем:

X=316,017

Для накопления требуемой суммы необходимо 317 дней.

Задача 5. Клиент положил в банк 60 тыс. рублей под простую процентную ставку 10% годовых и через полгода с учетом налога на проценты получил 62,8 тыс. руб. Определить ставку налога на проценты.

Решение

Из формулы (8.2) выразим ставку налога на проценты

$$t = 1 - \frac{1}{nr}\left(\frac{F_t}{P} - 1\right)$$

При $F_t = 62{,}8;\ P=60;\ r=0{,}1;\ n=0{,}5$

$t=0{,}067$

Ставка налога на проценты равна 6,7%.

Лабораторная работа № 9. **Определение параметров ренты**

Постоянный аннуитет (финансовая рента) описывается набором основных параметров – платеж аннуитета, процентная ставка, срок действия аннуитета. Зная эти параметры, можно решать прямую и обратную задачи оценки аннуитета - определить его будущую и приведенную стоимость. При разработке финансовых контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задаются будущая или приведенная стоимость ренты, и необходимо рассчитать значения ее параметров.

Цель проведения занятия –научиться определять параметры аннуитетов, используя формулы финансовых вычислений.

Основные формулы

$$A = \frac{FV_{pst}}{FM3(r,n)} \quad (10.1)$$

$$A = \frac{PV_{pst}}{FM4(r,n)} \quad (10.2)$$

$$n = \frac{Ln(\frac{FV_{pst}}{A}r + 1)}{Ln(1+r)} \quad (10.3)$$

$$n = -\frac{Ln(1 - \frac{PV_{pst}}{A}r)}{Ln(1+r)} \quad (10.4)$$

$$FM3 = \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (10.5)$$

$$FM4 = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \quad (10.6)$$

Типовые задачи с решениями

Задача 1.Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому в случае его постоянной работы на фирме до выхода на пенсию (в 60 лет) фирма обязуется в начале каждого года перечислять на счет работника в банке одинаковые суммы, которые обеспечат работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 30 00 руб. в течение 10 лет. Какую сумму ежегодно должна перечислять фирма, если работнику 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 10% ?

Решение

Выплаты работнику после выхода на пенсию представляют собой аннуитет постнумерандо.

По формуле (10.2) при *A=30 000; r=10%; n=10* найдем приведенную стоимость этого аннуитета :

PV=30000×FM4(10%,10) =30 000×6,145 = 184350

Таким образом, если иметь на счете в момент выхода на пенсию 184 350 руб. можно ежегодно снимать с него 30 000 руб. и через 10 лет исчерпать счет полностью.

Теперь необходимо выяснить, какую сумму фирма должна в начале года перечислять на счет работника, чтобы за 20 лет (60 – 40 = 20) накопить 184350 руб.

Размер вклада можно найти из формулы (11.1), полагая $FV_{pre}=184350$:

A=184350 / [FM3(10%,20) (1+ r)] =184350/(57,274×1,1)= 2926,125

Таким образом, фирме достаточно перечислять на счет работника 2916 руб.13 коп.

Задача 2.Иванов должен Петрову 200 тыс. руб. Он предлагает вернуть долг равными ежегодными платежами в 50 тыс. руб. Через какое время долг будет погашен, если на него ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 12% годовых?

Решение

По формуле (11.4) при $A=50;\ r=0,12;\ PV_{pst}=200$

$$n = -\frac{Ln(1 - \frac{200}{50}0,12)}{Ln(1 + 0,12)}$$

n=5,77

Долг будет погашен через 5,77 года

Задача 3.Господин X выплатил жене при разводе 1 млн. руб. Жена после развода планирует получать ежегодно одинаковые суммы в течение 20 лет. Какую сумму она будет получать, при условии, что процентная ставка по вкладам в банк равна 10% годовых?

Решение

1 млн. руб. – это приведенная стоимость срочной ренты постнумерандо, срок ренты- 20 лет, выплаты по ренте – ежемесячные. Величину неизвестного платежа находим из формулы (11.2) при *PV =1 000 000 ; n=20; r=0,1*

A=1 000 000/FM4(10%,20)

A=1 000 000/ 8,5136= 117 459,1

Ежегодно жена будет получать 117 459 руб.10 коп.

Задача 4.Некоторая фирма хочет создать фонд в размере 3500 тыс. руб. С этой целью в конце каждого года фирма предполагает вносить по 600 тыс. руб. в банк под 8% годовых. Найти срок, необходимый для создания фонда, если банк начисляет сложные проценты ежегодно.

Решение

По формуле (10.3) при *FV=3500; A=600; r=0,08*:

$$n = \frac{\ln(\frac{3500}{600} \cdot 0{,}08 + 1)}{Ln(1 + 0{,}08)}$$

n=4,976443

Для создания фонда потребуется 5 лет.

Лабораторная работа № 10. **Конверсия и замена рент**

На практике часто сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или в ходе его выполнения необходимо изменить условия выплаты ренты. Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом (*выкуп ренты*); или наоборот: замена разового платежа рентой (*рассрочка платежей*). К более сложному случаю относится объединение нескольких рент в одну – *консолидация рент*.

Цель проведения занятия –научиться рассчитывать характеристики заменяющих рент, используя формулы финансовых вычислений.

Основные формулы

Выкуп ренты.Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом, поэтому для вычисления размера разового платежа выбирается формула для нахождения приведенной стоимости аннуитета постнумерандо или пренумерандо:

$$PV_{pst} = A\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot FM4(r,n) \quad (11.1)$$

$$PV_{pre} = (1+r)PV_{pst} = A \cdot FM4(r,n) \quad (11.2)$$

Рассрочка платежей.Рассрочка платежей – обратная задача к задаче выкупа ренты. Обязательство по уплате некоторой суммы заменяется равными платежами в рассрочку. Для решения задачи приравнивают современную стоимость ренты, с помощью которой проводится рассрочка, к сумме долга. Задача может заключаться в определении параметров этой ренты - члена ренты или ее срока, при условии, что остальные параметры заданы. Подобные задачи рассматриваются в лабораторной работе № 12.

Объединение (консолидация) рент.Объединение рент заключается в замене нескольких рент с заданными параметрами новой рентой, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющих и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} PV_i \quad (11.3)$$

где *PV*- современная стоимость заменяющей ренты;

PV_i – современная стоимость i-той заменяемой ренты.

Замена немедленной ренты на отсроченную.Пусть имеется немедленная рента с параметрами A, n, r. Необходимо отсрочить выплаты на t лет. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности равенство приведенных стоимостей запишется следующим образом:

$$PV_1 = (1+r)^{-t} PV_2 = FM2(r,n) \cdot PV_2 \quad (11.4)$$

где PV_1 - современная стоимость немедленной ренты;

PV_2 – современная стоимость отложенной ренты.

Пусть срок отложенной ренты не изменяется, тогда неизвестный платеж отложенной ренты находится из уравнения:

$$A_2 = A_1 \cdot (1+r)^t \quad (11.5)$$

Где A_1 - платеж исходной ренты

A_2 – неизвестный платеж отложенной ренты

t – время отложения ренты

Пусть платеж отсроченной ренты не изменяется, тогда новый срок отложенной ренты находится из уравнения:

$$n_2 = -\frac{Ln\{1-[1-(1+r)^{-n1}](1+r)^t\}}{Ln(1+r)} \quad (11.6)$$

где n_2 – неизвестный срок отложенной ренты

n_1 – срок исходной ренты

t – время отложения ренты

в общем случае, когда $n_1 \neq n_2$ из равенства $PV_1 = PV_2$ следует:

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{FM4(n_1, r)}{FM4(n_2, r)} (1+r)^t \quad (11.7)$$

Типовые задачи с решениями.

Задача 1. Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями А=2 млн. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года без изменения срока ренты. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.

Решение

По формуле (11.4) при $A_1 =2; t=2; r=0,2$

$A_2=2\cdot(1+0,2)^2$

$A_2 =2,88$

Отказ от немедленной выплаты ренты приводит к увеличению платежа до 2,88 млн.руб.

Задача 2. Рента с ежегодными платежами в 2 млн. руб. и сроком 5 лет откладывается на три года без изменения сумм выплат. Найти новый срок ренты при условии, что на поступающие платежи ежегодно начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых.

Решение

В соответствии с (11.5) при $n_1 =5; t=3; r=0,08; A=2$

$$n_2 = -\frac{Ln\{1-(1-1{,}08^{-5})1{,}08^{3}\}}{Ln1{,}08} = 6{,}689$$

Отказ от немедленной выплаты ренты увеличивает ее срок до 6,689 года, т.е. на 1,689 года.

Пусть продолжительность новой ренты в целых годах равна 6. тогда приведенная стоимость новой ренты составит

$$PV_2 = 2\cdot FM4(8\%,6)\cdot FM2(8\%,3) = 2\cdot 4{,}6288\cdot 0{,}7938 = 7{,}3396$$

Современная стоимость исходной ренты составит

$$PV_1 = 2 \cdot FM4(8\%,5) = 2 \cdot 3,9927 = 7,9854$$

Разность в сумме 0,6458 млн. руб. необходимо уплатить в начале действия контракта.

Задача 3.Пусть немедленная рента постнумерандо с условиями А=2 млн. руб. и сроком 8 лет откладывается на 2 года с изменением срока ренты до 11 лет. Сложная процентная ставка составляет 20% годовых. Необходимо найти платеж отложенной ренты.

Решение

По формуле (11.6) при $A_1 = 2;\ t=2;\ r=0,2;\ n_1=8;\ n_2=11$

$$A_2 = 2 \cdot \frac{FM4(20\%,8)}{FM4(20\%,11)} \cdot 1,2^2 = 2\frac{3,8372}{4,3271} \cdot 1,2^2 = 2,5539$$

Платеж отложенной ренты равен 2,5539 млн.руб.

Задача 4.Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 100 тыс. руб. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной, сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене можно приобрести эту ренту, если выплаты будут осуществляться 1) через 3 года; 2) немедленно, а сложная процентная ставка равна 4% годовых?

Решение.

1) используем формулу (11.3), считая полугодие базовым периодом, при $t=6$

$PV=100\times FM2(2\%,6)\times FM4(2\%,30)=100\times 0,888\times 22,3965=1988,809$

Ренту можно приобрести за 1 988 809 руб.

2) используем формулу (11.3), считая полугодие базовым периодом при $t=0$

$PV=100\times FM4(2\%, 30)=100\times 22,3965=2239,65$

Ренту можно приобрести за 2239650 руб.

Задача 5.Три ренты постнумерандо - немедленные, годовые, заменяются одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент:

$A_1 = 100$; $A_2 = 120$; $A_3 = 300$ (тыс. руб.); $n_1=6$; $n_2=11$; $n_1=8$ лет. Необходимо:

1) Определить платеж заменяющей ренты при использовании сложной ставки 20% годовых:

2) Определить срок заменяющей ренты при условии, что размер платежа равен 1500 тыс. руб.

Решение

Данные для определения приведенных стоимостей заменяемых рент занесем в таблицу:

№№ ренты	Платеж ренты	Срок ренты	FM4(r,n)	PV
			3,32551	332,551
			4,32706	519.472
			3.83716	1151,148
Итого				2002,946

1) Платеж заменяющей ренты находим из уравнения:

$$A = \frac{PV}{FM4(20\%,7) \cdot FM2(20\%,3)} = \frac{2002{,}946}{3{,}60459 \cdot 0{,}5787} = 960{,}189$$

Платеж заменяющей ренты равен 960 189 руб.

Если бы заменяющая рента была бы немедленной, ее платеж находим из уравнения:

$$A = \frac{PV}{FM4(20\%,7)} = \frac{2002{,}946}{3{,}60459} = 555{,}665$$

2) Определим современную стоимость заменяющей немедленной ренты:

$PV = 2002{,}946 \cdot (1+0{,}2)^3 = 3461{,}091$

Неизвестный срок ренты находим из формулы (10.4) (Занятие № 10):

$$n = -\frac{Ln(1 - \frac{PV_{pst}}{A} r)}{Ln(1+r)}$$

при $A=1500$; $r=20\%$; $PV=3461{,}091$

$$n = -\frac{Ln(1 - \frac{3461{,}091}{1500} \cdot 0{,}2}{Ln 1{,}2} = 3{,}395$$

Установим срок заменяющей ренты 4 года. При этом приведенная стоимость ренты равна

$PV = 1500 \cdot FM4(20\%,4) = 1500 \cdot 2{,}5887 = 3883{,}05$

Излишек в сумме $3883{,}05 - 3461{,}091 = 421{,}959$ компенсируем в начале финансовой операции.

Лабораторная работа № 11 **Типовые задачи с решениями.**

Пусть заем в сумме P выдан под r простых ссудных процентов на n периодов. К концу финансовой операции величина займа составит величину

$$F = P(1 + nr)$$

.

Если предполагается возвращать займ одним платежом в конце срока финансовой операции, то величина F и есть размер возвращаемого платежа.

Задача 1. Погашение займа одним платежом.

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить размер платежа, если ссуда возвращается одним платежом в конце срока финансовой операции и начисляются простые проценты.

Решение

Величину платежа находим по формуле

$$F = P(1+nr)$$ при $P=5;\ r = 0,1;\ n =5$:

$$F = 5(1+0,1\cdot 5) \ = 7,5$$ Размер платежа равен 7 500 000 руб.

Пусть заем в сумме P выдан под r сложных ссудных процентов на n периодов. К концу финансовой операции величина займа составит величину

$$F = P(1+r)^n$$.

Если предполагается возвращать займ одним платежом в конце срока финансовой операции, то величина F и есть размер возвращаемого платежа.

Задача 2. Погашение займа одним платежом.

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить размер платежа, если ссуда возвращается одним платежом в конце срока финансовой операции и начисляются сложные проценты.

Решение

Величину платежа находим по формуле

$$F = P(1+r)^n$$ при $P=5;\ r = 0,1;\ n =5$:

$$F = 5(1+0,1)^5 = 8,05255$$

Размер платежа равен 8 052 550 руб.

Сам заем называется основным долгом, а наращиваемый добавок – процентными деньгами. Пусть заем в сумме P выдан под r сложных ссудных процентов на n периодов. За первый год процентные деньги составят величину $r\times P$. Если эти деньги выплатить, то останется только основной долг в размере P. Таким же образом в конце каждого года (кроме последнего) выплачивается одна и та же величина $r\times P$. В конце n-ного, последнего года, выплаты составят величину $r\times P+P$, процентные деньги и сумму основного долга.

Общая сумма выплат за n периодов составит величину $P+ r\times P\times n=P(1+nr)$, т.е. операция погашения займа способом погашения основного долга одним платежом в конце эквивалентна наращению долга по схеме простых процентов по ставке r.

Задача 3. Погашение основного долга одним платежом.

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить общую сумму выплат, если ссуда возвращается способом «погашение основного долга одним платежом в конце срока финансовой операции».

Решение

Величина процентных платежей за 8 лет составит $r \times P \times n = 0{,}1 \times 5 \times 5 = 2{,}5$

Общая сумма выплат составит 2,5 млн.+ 5 млн. =7,5 млн.руб.

Пусть заем в сумме P выдан под r сложных ссудных процентов на n периодов. При погашении основного долга равными годовыми выплатами в конце каждого года выплачивается n-ная доля основного долга и проценты, начисленные на сумму долга, которой пользовались в течение года.

В конце первого года выплачивается доля основного долга, равная величине P/n и выплачиваются проценты с суммы P, которой пользовались в течение года, равные величине $r \times P$. Общий платеж в конце первого года равен величине $P/n + r \times P$.

В конце второго года выплачивается доля основного долга, равная величине P/n и выплачиваются проценты с суммы $(P - P/n)$, которой пользовались в течение года, равные величине $r \times (P - P/n)$. Общий платеж в конце второго года равен величине $P/n + r \times (P - P/n)$.

В общем случае в конце года $k+1$ общий платеж равен величине $P/n + r \times (P - k \times P/n)$.

Платежи каждого года образуют арифметическую прогрессию с разностью

$d = r \times P/n$, первым членом $a_1 = P/n + r \times P$ и последним членом $a_n = P/n + r \times P/n$.

Сумма n членов арифметической прогрессии равна

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

Величина выплат составит $P + \dfrac{\Pr(1+n)}{2}$

Задача 4. Погашение основного долга равными годовыми выплатами

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить ежегодные выплаты и общую сумму выплат, если ссуда возвращается способом «погашение основного долга равными годовыми выплатами».

Решение

Найдем сумму арифметической прогрессии

$$P + \frac{\Pr(1+n)}{2}$$ при *P=5000*; *r=0,1; n=5:*

5000+5000·0.1(1+5) / 2=6500

Сумма ежегодных выплат представлена в таблице.

Год
Основной долг
Проценты
Сумма к выплате

Пусть заем в сумме *P* выдан под *r* сложных ссудных процентов на *n* периодов. При погашении займа равными годовыми выплатами ежегодные платежи можно рассматривать как годовую ренту (аннуитет) с продолжительностью *n* периодов и неизвестным платежом, равным *A*. Неизвестный платеж ренты можно найти, приравнивая современную стоимость этой ренты сумме займа.

Тогда платеж *A* находим из уравнения: $P = A \cdot FM4(r, n)$, поэтому

$$A = \frac{P}{FM4(r, n)}$$ Общая сумма выплат при этом составит величину $n \times A$

Задача 5. Погашение займа равными годовыми выплатами

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. Определить общую сумму выплат, если ссуда возвращается способом «погашение займа равными годовыми выплатами».

Решение

Величину ежегодного платежа находим из уравнения $A = \frac{P}{FM4(r,n)}$ при $P=5;\ r = 0,1;\ n =5$; $FM4(10\%,5)=3,791$

$A=1318,913$

Общая сумма выплат составит $5\times 1318,913$= 6 594 566 руб.
Взятый заем может погашаться различными способами. Например, заемщик может создать специальный погасительный фонд и накапливать в нем средства, чтобы погасить заем одним платежом в конце срока финансовой операции. Очевидно, что это возможно только в том случае, если у заемщика есть возможность накапливать деньги в некотором фонде под более высокий процент.

Пусть заем в сумме P выдан под r_1 сложных ссудных процентов на n периодов. Тогда к конце срока финансовой операции финансовой операции величина займа составит величину

$F = P(1+r_1)^n$. Платежи в погасительный фонд составляют годовую ренту с ежегодным платежом, равным A и процентной ставкой $r_2 > r_1$, будущая стоимость этой ренты равна величине $F = P(1+r_1)^n$. Тогда величину ежегодного платежа в погасительный фонд находим из уравнения:

$$A = \frac{P(1+r_1)^n}{FM3(r_2,n)}$$

Задача 6. Создание погасительного фонда

Ссуда в сумме 5 млн. руб. выдана на 5 лет под 10% годовых. У заемщика есть возможность создать накопительный фонд в банке, начисляющим по вкладам 12% годовых. Найти величину ежегодного платежа в погасительный фонд.

РешениеВеличину ежегодного платежа в погасительный фонд находим из формулы $A = \frac{P(1+r_1)^n}{FM3(r_2,n)}$ при $P=5;\ r_1=0,1;r_2=0,12;n=5$

A=1267550

Величина ежегодного платежа в погасительный фонд равна 1 267 550 руб.

Общие расходы по погашению займа составят (1 267 550 ·5)= 6 337 749 руб.

Литература

1 Е.М.Четыркин.Финансовая математика. М.Дело. 2008.
2 М.С.Красс, Б.П.Чупрынов.Математические методы и модели. ПИТЕР. 2009.
3 Ю.П. Лукашин. Финансовая математика. Учебное пособие.-М: МЭСИ 2007
4 В.В.Ковалев Сборник задач по финансовому анализу. -Учебное пособие.-Финансы и статистика. 2008.